Ibn ᶜAbdūn's Epistle on Surface Measuring: A Witness to the pre-Algebraical Tradition

Ahmed Djebbar

An oversight difficult to understand, and for which we have no excuse, led us to publish an incomplete text of the epistle of Ibn ᶜAbdūn in *Suhayl* 5 (2005), 7-68 (of the Arabic part of the journal). This is why we publish here the missing part together with an English summary of the introduction. We pray the author and the readers to forgive us.

Key words: Mathematics, Algebra, Surface Measuring, Practical Geometry, al-Andalus.

Abstract:

Many mathematicians in the Arab tradition of the period between the 9th and the 15th centuries dedicated chapters or complete works to a given topic related to surface measuring geometry. The extant works produced in Eastern Islam contain, essentially, the formulas giving the surfaces of plane rectilinear figures and portions of a circle, as well as the surfaces and volumes of certain solid figures. Sometimes we also find in them problems of surface measuring solved using algebraic procedures.

Ibn ᶜAbdūn's *Risāla fī l-taksīr* (Epistle on Surface Measuring), which is the subject of this paper, belongs, by its title and contents, to the Eastern tradition of surface measuring and indeed represents the extension of this tradition in al-Andalus. Its primary interest lies in the fact that it is, until today, the oldest extant Arabic mathematical text produced in al-Andalus as well as the oldest proof of the circulation, in al-Andalus, of certain Eastern chapters of the tradition of mensuration. A second point of interest is the fact that some technical terms, computational procedures and geometrical figures differ from those found in Eastern texts. Thirdly, Ibn ᶜAbdūn's *Risāla* is, up till now, the only known representative of a

geometrical tradition which seems to have reached the Islamic lands before Euclidean geometry and the algebra of al-Khwārizmī's tradition.

The paper deals briefly, in its first part, with the essential aspects of the geometrical tradition of surface measuring contained in certain works known in Eastern and Western Islamic countries. The works chosen for the presentation are the *Abridgement on calculation using restoration and comparison* (*al-Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa l-muqābala*) by al-Khwārizmī (d. 850), the *Sufficient on calculation* (*al-Kāfī fī l-ḥisāb*) by al-Karajī (d. 1023), the *Fertilization of spirits* (*Talqīkh al-afkār*) by Ibn al-Yāsamīn (d. 1204), the *Book on Land-measurement* (*Kitāb misāḥat al-araḍīn*) by Abū Kāmil (d. 930), the *Liber mensurationum* by Abū Bakr (11th c.), the *Book on Measurement* (*Kitāb al-misāḥa*) by Ibn Ṭāhir al-Baghdādī (11th c.), the *Book on Levels concerning the Explanation of Measurements* (*Kitāb al-ṭabaqāt fī sharḥ al-misāḥāt*) by Qāḍī Abū Bakrs and the *Abridgement on Measurement* (*al-Risāla fī l-ashkāl al-misāḥiyya*) by Ibn al-Bannā' (d. 1321).

Beginning with the oldest known Arabic text on the geometry of surface mensuration, the short chapter of al-Khwārizmī's *Algebra*, the article shows that, as an extension of its contents, a double Arabic tradition of measurement was developed together with another, far more important, geometrical one based on the contents of Euclid's *Elements*. One of the two former traditions was concerned, exclusively, with the study of the elements of the figures. As for the second, it introduced, in an implicit or explicit way, the use of algebraical procedures which allowed the determination of certain elements of the figures under consideration.

In its second part, the paper presents all known information about Ibn ᶜAbdūn's biography and about his scientific activities both in al-Andalus and in the Islamic East. The last part of the article is dedicated to the epistle itself: description of the only known manuscript, analysis of its mathematical contents and edition of the Arabic text.

The epistle presents more than 127 formulas or problems classified in five categories which correspond to the different kinds of the plane or solid figures under consideration: quadrilaterals (square, rectangle, rhombus, parallelogram and isosceles trapezium), triangles (acute-angled, obtuse-angled and right-angled), trapezia of any kind, regular solids (right-angled parallelepiped, truncated or non-truncated pyramid), the circle and portions of a circle and, finally, three kinds of peculiar solids: *ᶜurmat al-ṭaᶜām* (pile of grain), *ḥūṭ al-ṭaᶜām* (fish of grain) and *fanīqa* (Sp. *fanega*), the latter being a unit of storage capacity which was still used in Spain

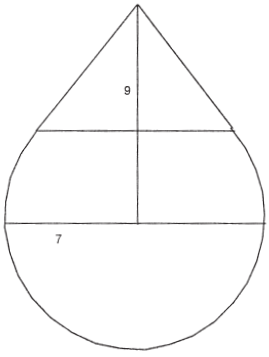
towards the end of the 19th century.

In addition to the classical tools allowing the calculation of surfaces and volumes of standard figures, we also find in the text the explicit or implicit use of well-known techniques, such as Pythagoras' theorem, the remarkable identities, surface formulas of Greek origin and approximative formulas, though none of these formulas or procedures are ever mentioned.

One of the peculiarities of this *Risāla* is the solution of many measuring problems with a procedure which resembles, both in the successive steps of computation and in the formulation, those used by Babylonian scribes in cuneiform tablets. Although this procedure is equivalent to the solution of a second degree equation, we never find in it the use of the algebraical terminology of the 9th and 10th centuries. A second peculiarity is related to a part of the terminology used by the author, which is different from other known mensuration handbooks, because it is either "archaic" or "local". Such is the case of an erroneous formula for the computation of a surface or the use of the names of certain solids which are not usually found in Eastern texts.

The article also shows that Ibn ᶜAbdūn's epistle is the origin of a long tradition of mensuration which was Andalusī in its beginning and then became Maghribī, and which is represented by a certain number of texts, some of which have already been published, while others have been discovered recently. These recent discoveries bear witness to the fact that the chapter on mensuration is not only concerned with the problems of surface calculation but also deals with problems related to the division of figures, something which implies a link with legal practices involving the division of plots in property inheritances.

ومعـــرفة كـــم فيها من الطعام، فهو أن تقسم التكسير على سبعة وعشرين يخرج لك أمـــــــداد[8] // [23 و]، إن كانت أشبارا. وإن كانت حدود المجسم أذرعا، فاقسم التكسير علـــى ثلاثة وثلاثة أثمان، فما خرج فأمـــــداد[9]. وإن شئت، فاضرب تكسير المجسم في ثمانية، إذا كان حدوده أذرعا، فما خرج فأمداد. وإن أردت إخراجها أقفزة، فاقسم التكسير على اثنين وربع فما خرج فأقفزة، إن شاء الله تعالى. وهذه صورته:



كمل الكتاب بحمد الله وحسن عونه، والصلاة والسلام على سيدنا محمد.

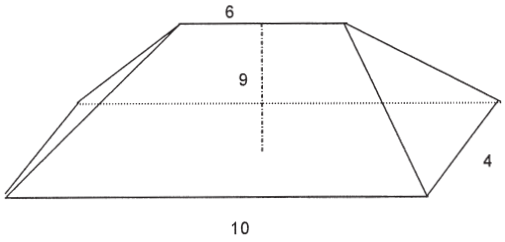
[8] أمداد: ابدا.

[9] فأمداد: فاحدا.

باب تكسير حوت الطعام

[127] إذا قــيل لك حوت طوله عشرة وعرضه أربعة وشوكته ستة وارتفاعه على وسطه تسعة.

فمعرفة تكسيره أن تضرب طوله في عرضه يكون أربعين ثم تضرب نصف شوكته في الضـــلع الذي لا يوازيها من القاعدة، وذلك ثلاثة في أربعة يكون اثني عشر. فتجمعها إلى الأربعيـــن ثم تضرب ما اجتمع في ثلث الارتفاع يكون مائة وستة وخمسين وهو التكسير. وهذه صورته:



باب تكسير عرمة الطعام

[128] إذا قيل لك: عرمة طعام دور أسفلها اثنان وعشرون[6] وارتفاعها على وسطها تسعة، كم تكسيرها ؟

باب حسابه أن تقسم الدور على ثلاثة وسبع أبدا، كما تقدّم في الدوائر، يخرج لك القطر، وذلـــك ســـبعة. ثم تضرب[7] نصف القطر في نصف الدور يكن تكسير الدائرة. فتضرب التكسير في ثلث الارتفاع، وذلك ثلاثة يكن مائة وخمسة عشر ونصفا، وهو تكسير العرمة.

[6] اثنان وعشرون: اثنين وعشرين. كتب الناسخ فوق كل كلمة "كذا" للدلالة على أنه وجد هذه الصيغة في النسخة التي نقل عنها.

[7] ثم تضرب: العبارة مكررة.

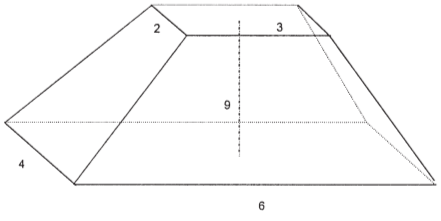
< المجسمات المحلية >

باب تكسير الفنيقة

[126] إذا قـيل لـك: مجسـم طول أسفله ستة وعرض أسفله أربعة وطول أعلاه ثلاثة وعرضـه اثـنان وهذه الاثنان توازيان الستة التي في طول أسفله وارتفاعه على وسطه تسعة.

فمعـرفة تكسيره هو أن تضرب طول أسفله في عرض أسفله يكن أربعة وعشرين ثم تضـرب طول أعلاه في عرض أعلاه يكن ستة، ثم تضرب نصف طول أعلاه في الضلع الـذي لا يوازيـه من أسفل المجسم وذلك واحد ونصف في ستة، يكون تسعة ثم تضرب[4] نصف عرض أعلاه في الضلع الذي ليس يوازيه من قاعدة المجسم وذلك واحد في أربعة، يكون أربعة. فتجمع الأربعة والتسعة والأربعة والعشرين[5] والستة، يكون ثلاثة وأربعين. فتضربها في ثلث الارتفاع وذلك ثلاثة يكن مائة وتسعة وعشرين، وهو التكسير.

وهذا القياس يصحبك في كل مجسم يكون أعلاه مخالفا لأسفله، كان // [22 ظ] أعلاه مـربعا متسـاويا أو مـربعا مسـتطيلا، إذا كان أسفله مربّعا متساويا أو مستطيلا. وهذه صورته:



[4] تضرب: ناقصة.

[5] الأربعة والعشرين: الأربع العشرين.

< القوس الأعظم من نصف دائرة >

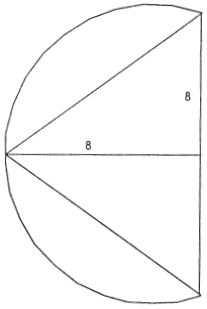
وأما تكسير التي هي أكثر من نصف دائرة، فعمل حساب هذا أن تعرف من أي دائرة قطعت.

[125] ومـــثال ذلك مقوسة سهمها ثمانية ووترها ثمانية. فمعرفة من أي دائرة قطعت أن تنصف الوتر وتضربه في مثله يكن ستة عشر، فاقسمها على السهم يخرج لك اثنان. فزد عليها السهم، فما بلغ إليه العدد فهو قطر الدائرة التي قطع ذلك القوس منها، وذلك عشرة.

ومعرفة تكسيرها أن تضرب نصف القطر في نصف القوس.

ومعرفة القوس بأن تحمل على السهم سبعه، يكن[2] تسعة وسبع . فاحملها على العشرة التـــي هـــي قطر الدائرة يكن تسعة عشر وسبع. فزد عليها ما بين نصف // [22 و] قطر الدائرة وبين سهم القطعة، وذلك ثلاثة، يكن اثنين وعشرين وسبعا، وهو الدور.

فإذا علمت الدور، ضربت[3] نصفه في نصف القطر، فما بلغ إليه الضرب حفظته ثم تنظر ما بين السهم ونصف القطر. فما كان ضربته في نصف الوتر. فما بلغ إليه الضرب زدته على ما كان. فهو التكسير وهو سبعة وستون وسبعان ونصف سبع. وهذه صورته:



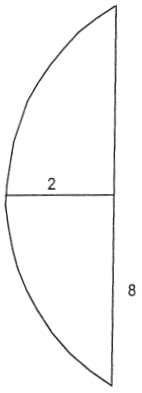
[2] يكن: ناقصة.

[3] ضربت: وضربت.

فـــإن أردت معـــرفة القوس حملت على السهم مثل سبعه ثم تحمل ما اجتمع على قطر الدائـــرة التـــي قطع منها ذلك القوس // [21 ظ]، فما اجتمع لك نقصت منه ما بين الوتر ونصف قطر الدائرة، فما بقي بعد الزيادة والنقصان فهو القوس.

وفي معرفة القوس وجوه لا يكاد فهمها المبتدئ في علم الحساب. ولولا ذلك لأتينا بعلمه وأوضحناه، إن شاء الله تعالى[1].

[124] فإن أردت معرفة تكسير القوس، ضربت نصف القوس في نصف قطر الدائرة، فما بلـــغ إلـــيه الضرب حفظته ثم تنظر ما بين السهم وبين نصف القطر. فما كان ضربته في نصـــف الوتر. فما بلغ إليه الضرب نقصته من الذي حفظت لأن القوس هو أقل من نصف دائرة. ولو كان أكثر من نصف دائرة لزدته على ما حفظت. فما بقي بعد نقصانك العدد من العدد المحفوظ، فهو تكسير القوس. وهذه صورته:



فافهم تصب إن شاء الله تعالى.

[1] تعالى: تعلى. وهكذا فيما بعد.

تتمة الرسالة في التكسير لابن عبدون

أحمد جبّـــار

ملاحظـــة: *لقـــد وقع من قبَل المحررين سهو يصعب فهمه ولا عذر له وهـــو أننا نشرنا، في مجلة سهيل، العدد 5 (2005)، ص 7–68، (من القسم العربيه للمجلة)، نصّا غير كامل لرسالة ابن عبدون. ولهذا السبب، ننشـــر هـــنا الفقـــرة الناقصـــة للرسالة مع ملخص لمقدمة المقالة باللغة الإنكليزية. فمعذرة للمؤلف وللقراء.*

< الأقواس الأقل من نصف دائرة >

[123] وأمـــا المقوســـات التي هي أقل من نصف دائرة، فهي التي يكون في سهمها اثنان ووتـــرها ثمانية. فإن معرفة تكسيرها، من قبل قوسهـــــا – ومعرفة قوسها بمعرفة قطر الدائـــرة التـــي منها قطعت– أن تنصف الوتر وذلك أربعة. فاضربها في مثلها يكن ستة عشـــر، فاقســـمها على السهم يخرج لك ثمانية. فزد عليها السهم يكن عشرة، فهو قطر الدائرة التي قطع منها ذلك القوس.